

福島県

数学

ジュニアオリンピック



注意

- 1 指示があるまで、中を開かないでください。
- 2 問題は **1** から **6** まであります。
- 3 解答は、すべて解答用紙に書きましょう。
- 4 解答は、こく、はっきりと書きましょう。また、消すときは、消しゴムできれいに消しましょう。
- 5 解答時間は60分です。解答が早く終わったら、よく見直しましょう。
- 6 解答用紙には、会場名を○で囲み、受付番号、学校名、学年、氏名をまちがいのないよう書きましょう。
- 7 問題用紙の印刷が見にくいとき、ページがぬけていたりよごれていたりしたとき、解答用紙がよごれていたときは、手をあげて近くの先生に知らせてください。

福島県教育委員会

学び、育み、
実現する
ふくしま

1

ある規則にしたがって、次のように分数を並べていきます。

$$\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, \frac{1}{4 \times 5}, \frac{1}{5 \times 6}, \dots$$

それぞれ計算した結果を並べていくと、次のようになります。

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{2} & , & \frac{1}{6} & , & \frac{1}{12} & , & \frac{1}{20} & , & \frac{1}{30} & , & \dots \\ \text{1番目} & & \text{2番目} & & \text{3番目} & & \text{4番目} & & \text{5番目} & & \dots \end{array}$$

このとき、次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

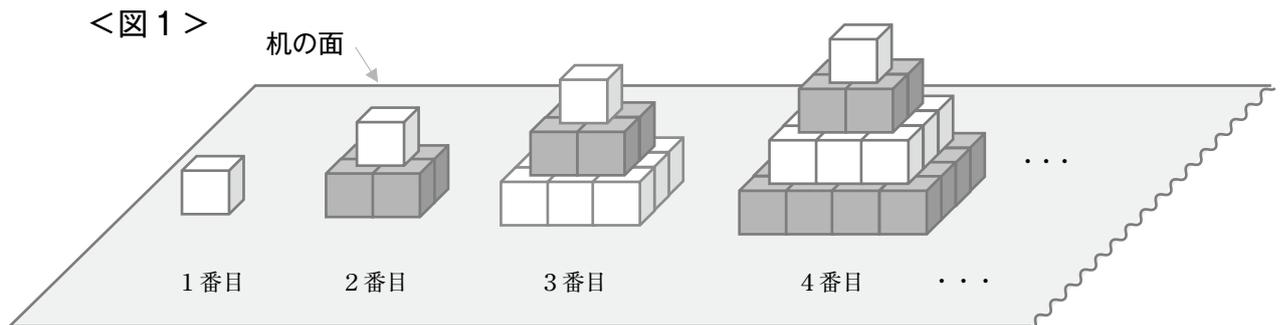
(1) 10番目の分数を求めなさい。

(2) 計算した結果が、初めて $\frac{1}{2024}$ より小さくなるのは何番目か求めなさい。

(3) 1番目から100番目までの分数をすべてたすといくつになりますか、その和を求めなさい。

1 辺が 1 cm の立方体の白色のブロック  と黒色のブロック  を交互に規則正しく積み重ねていき、<図 1> の 1 番目, 2 番目, 3 番目, 4 番目, … のように、机に面している部分が正方形となるように立体を作っていきます。例えば、2 番目の立体の机に面している部分は 1 辺が 2 cm の正方形, 3 番目の立体の机に面している部分は 1 辺が 3 cm の正方形になります。

このとき、次の (1), (2) の各問いに答えなさい。



(1) 5 番目の立体の体積を求めなさい。

(2) <図 1> のように立体を机に置いたとき、その立体の見える部分の面積について考えます。ただし、机に面している部分やブロックどうし面している部分は見えないものとします。

例えば、1 番目の立体の見える部分の面積は 5 cm^2 、2 番目の立体の見える部分の面積は 16 cm^2 、3 番目の立体の見える部分の面積は 33 cm^2 です。

① n 番目の立体の見える部分の面積を、 n を用いた式で表しなさい。

② 2024 番目の立体の見える部分の面積について、白色の部分の面積と黒色の部分の面積との差を求めなさい。

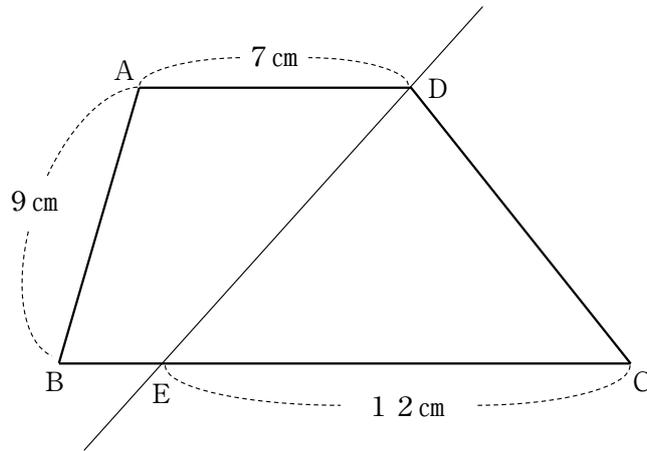
次の(1), (2)の各問いに答えなさい。

- (1) <図2>のように, 辺ADと辺BCが平行で, 辺ABが9 cm, 辺ADが7 cmの台形ABCDがあります。

この台形の辺BC上に, ECが12 cmとなるように点Eをとり, 直線DEをひいたら, 四角形ABEDと三角形CDEの面積の比が5 : 6になりました。

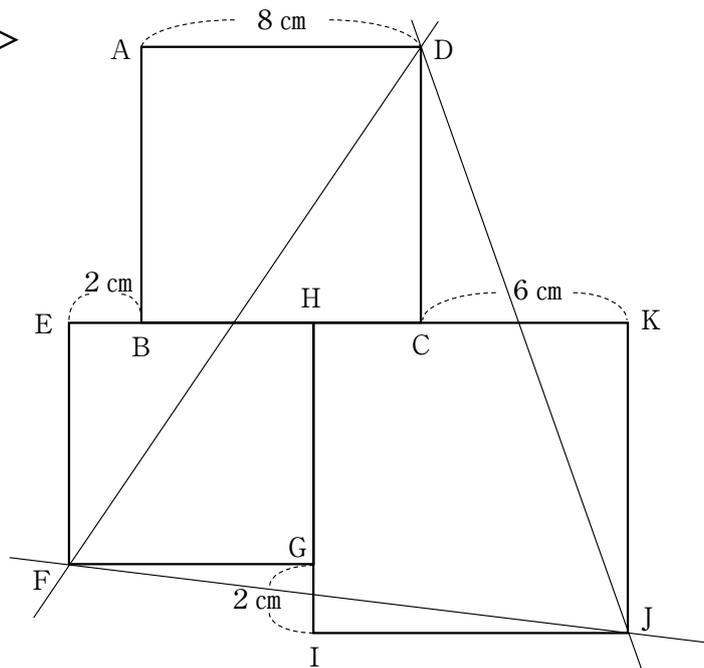
このとき, 辺BCの長さを求めなさい。

<図2>



- (2) 3つの正方形ABCD, EFGH, HIJKを<図3>のように並べます。
この図において, 3つの頂点D, F, Jを直線で結び三角形DFJを作ります。
このとき, 三角形DFJの面積を求めなさい。

<図3>



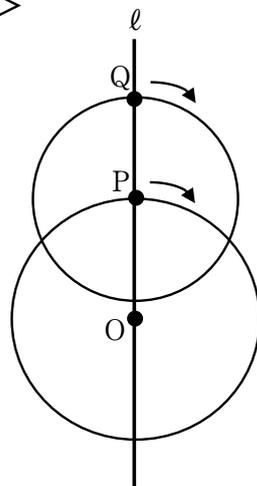
直線 ℓ 上に点 O , P , Q があり, 点 O を中心とした半径 OP の円と, 点 P を中心とした半径 PQ の円があります。2 点 P , Q は, <図 4> に示すそれぞれの位置から同時に動きはじめ, 次の<条件>にしたがって動くものとします。このとき, 次の(1)から(3)までの各問いに答えなさい。

<条件>

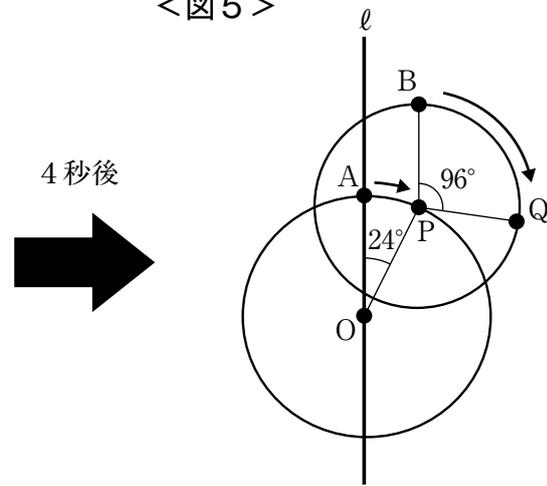
- ・ 点 P は, 点 O を中心とした半径 OP の円の円周上を, 時計回りに 60 秒で 1 周する速さで動きます。
- ・ 点 Q は, 点 P を中心とした半径 PQ の円の円周上を, 時計回りに 1 秒で 24° ずつ回転しながら動きます。点 Q が点 P を中心とした半径 PQ の円の円周上を 1 周したとき, 直線 PQ と直線 ℓ は平行になります。(直線 PQ と直線 ℓ が一致する場合も含む)

- (1) 直線 ℓ と, 点 O を中心とした半径 OP の円が交わっている点のうち, はじめに点 P があった位置を点 A とします。<図 4> は動きはじめる前の点 P , Q の位置を表しています。点 P , Q が動きはじめてから 4 秒後は, 下の<図 5> のようになります。ここで, 点 B は点 P を通る直線 ℓ と平行な直線と PQ を半径とする円との交点です。このとき, 点 O , P , A を結んでできる三角形 OPA において, 角 P の大きさを求めなさい。

<図 4>



<図 5>



- (2) 動きはじめてから, 3 点 O , P , Q がはじめて一直線上に並ぶのは, 何秒後か求めなさい。ただし, 3 点がこの順に並ぶ必要はありません。
- (3) 点 R は, 点 O を中心とした半径 OP の円の円周上を, 点 A から反時計回りに, 90 秒で 1 周する速さで動きます。点 R は点 P と同じ位置にあり, <図 4> の位置から点 P , Q , R が同時に動きはじめるとき, 4 点 O , P , Q , R が一直線上に並ぶのは何秒後か求めなさい。ただし, 4 点がこの順に並ぶ必要はありません。

右の<図6>は、日本の伝統模様の1つである「七宝(しっぽう)文様」といいます。平面上のどの方向にも限りなく広がる文様であることから、縁起が良い文様とされています。

この七宝文様を正方形□で切り取った図形から、円だけを抜き出した5つの円と、5つの円で仕切られた平面上に数カードを置く9個の場所A~Iを示したものが、右の<図7>です。

A~Iの場所に、次の9つの数字

-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

が書かれた全部で9枚の数カードを1枚ずつ置きます。

A~Iにすべての数カードを置いたとき、5つのどの円も数カードに書かれた数の和が5になるようにします。例えば、左上の円はAとBに置いた数カードの数の和が5になります。左下、右上、右下の円も同様に、それぞれCとD、EとF、GとHに置いた数カードに書かれた数の和が5になります。真ん中の円はB、D、F、H、Iに置いた数カードの数の和が5になります。

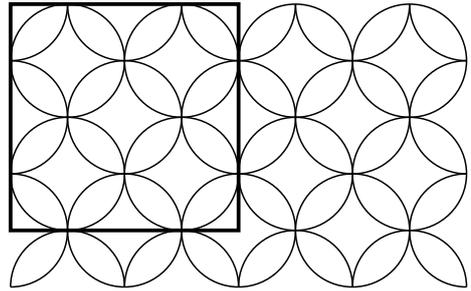
このとき、次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

(1) B, D, F, Hに置かれた数カードに書かれた数の和を求めなさい。

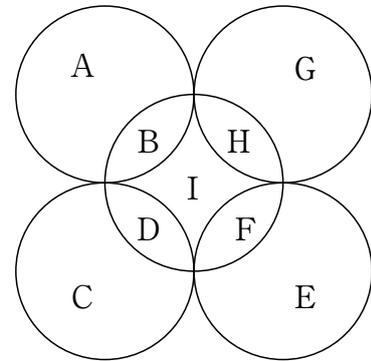
(2) B, D, F, Hに置かれた数カードに書かれた数の大きさを比べたとき、Bに置かれた数が最も小さく、B, D, F, Hの順に大きくなります。

このとき、B, D, F, Hに置かれた数カードに書かれた数をそれぞれ答えなさい。

<図6>



<図7>



ある自然数を、下の①、②のどちらかの計算を何回か繰り返すと、いずれ1になるといわれています。

- ① ある自然数が奇数ならば3倍して1をたす。
 ② ある自然数が偶数ならば2でわる。

例えば「3」は、 $3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ となり、計算を7回繰り返すと1になります。

このことを知った太郎さんと花子さんは下の<例>のように、自分たちの誕生日と日で和を求め、その数で計算を何回繰り返すと1になるのかを試してみることにしました。

<例> 3月14日生まれの場合 $3 + 14 = 17$
 11月 5日生まれの場合 $11 + 5 = 16$
 10月20日生まれの場合 $10 + 20 = 30$



花子さん 太郎さん

下の会話文を読んで、次の(1)、(2)の各問いに答えなさい。

今日、10月20日(数学ジュニアオリンピック当日)が誕生日の場合和が30になるね。30で試してみると、計算を18回繰り返すと1になったよ。



太郎さん

私の誕生日は10月10日だから、和は20になるよ。20で試してみると、計算を何回繰り返すと1になるのかしら？



花子さん

20が1になるまでに、計算を7回繰り返すと1になるね。ちなみに僕は3月生まれだけど、求めた和の数は計算を5回繰り返すと1になるよ。僕の誕生日をあてることはできるかな？



太郎さん

それだけでは1つに決めることはできないわ。誕生日は と の可能性があるもの。



花子さん

- (1) 太郎さんの誕生日として考えられる日付は3月何日と何日ですか。
 (2) 今日、10月20日から来年3月31日までの間の日付のなかで、花子さんのように誕生日と日から求めた和の数で試したとき、計算を7回繰り返すと1になる日付は全部で何通りありますか。

